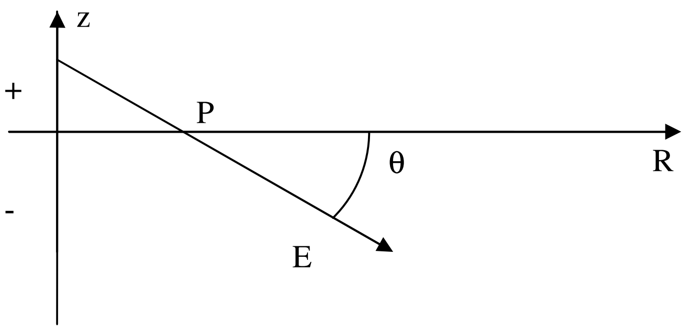
Corso di fisica II

Prova scritta del primo modulo del 24/06/08

Esercizio 1

Definiamo il sistema di riferimento: l'origine sia nel centro del filo, l'asse z, con versore $\hat{i}$, lungo il filo e l'asse R, perpendicolare ad esso e con versore $\hat{j}$.
Viene richiesto il campo lungo l'asse (da intendersi come asse di un segmento).



In un generico punto P vediamo il contributo al campo elettrico della parte positiva e di quella negativa del filo.

$$d\vec{E}_{+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \cdot dz}{R^2+z^2}\cdot\left(\hat{i}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta\right)$$

$$d\vec{E}_{+} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-\lambda \cdot dz}{R^2+z^2}\cdot\left(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta\right)$$

Considerando i contributi di parte positiva e negativa:

$$d\vec{E}_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2\lambda \cdot dz}{R^2+z^2}\cdot\hat{j}\sin\theta$$

Possiamo esprimere $\sin\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$

Quindi integrando sulla lunghezza del filo si ottiene:

$$\vec{E} = \int_0^d -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{R^2+z^2}\cdot\hat{j}\sin\theta\cdot dz = \int_0^d -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{R^2+z^2}\cdot\hat{j}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\cdot dz =$$

$$= \int_0^d -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\lambda}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\cdot\hat{j}\cdot zdz = -\int_{r^2}^{r^2+d^2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dw}{w^{3/2}}\hat{j} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}}-\frac{1}{r}\right)\cdot\hat{j}$$

Si noti che lungo l'asse il campo ha solo la componente parallela al filo.

Per il momento di dipolo, bisogna integrare sul volume (per un filo: sulla lunghezza) la carica per la distanza dal centro:

$$\vec{p} = \int_{-d}^{+d}\lambda(z)\cdot zdz\cdot\hat{j} = \int_0^{+d}\lambda\cdot zdz\cdot\hat{j} - \int_{-d}^{0}\lambda(z)\cdot zdz\cdot\hat{j} = \lambda d^2\cdot\hat{j} = 2.56\cdot 10^{-11}\,Cm$$

Esercizio 2

Affinché il filo si muova di moto circolare uniforme, bisogna far sì che la forza centripeta sia uguale (ed opposta) alla forza centrifuga. La forza centrifuga è data dall'inerzia del filo, quella centripeta dalla forza magnetica che due fili percorsi da correnti esercitano uno sull'altro.

$$F_{centrifuga-CF} = m\frac{v^2}{d} = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I_1 I_2 L}{d} = F_{centripeta-CP}$$

risolvendo rispetto a v:

$$v = \sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I_1 I_2 L}{m}} = 6.12\cdot 10^{-4}\, m/s$$

Si noti che la velocità tangenziale non dipende dalla distanza dal filo. Ovviamente non vale lo stesso per la velocità angolare.

Per il secondo quesito bisogna porre l'energia cinetica iniziale del filo uguale al lavoro esercitato contro la forza magnetica nello spostamento dalla posizione iniziale a quella finale. Si noti che come differenza di energia cinetica si prende proprio l'energia cinetica iniziale poiché quando il filo si trova alla massima distanza la sua velocità è nulla (verifica: distanze minime o massime nel grafico posizione vs tempo sono individuate da punti stazionari, ovvero con derivata prima – la velocità – nulla).

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I_1 I_2 L}{2} = L_{dx} = \int_d^x F_{CP}\cdot dx = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot I_1 I_2 L \log\left(\frac{x}{d}\right)$$

La prima uguaglianza deriva dalla prima equazione. Semplificando e risolvendo rispetto a x si ottiene:

$$x = \sqrt{e}\cdot d = 8.2cm$$